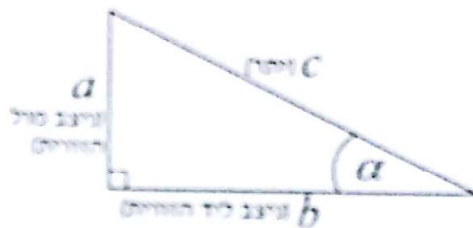


נושא 5 - טריגונומטריה

פונקציות טריגונומטריות מאפשרות לנו למצוא קשר בין יחסיו של זווית במשולש לבין זוויותיו

טריגונומטריה במשולש ישר זווית

במשולש ישר זווית נשתמש ביחסים הבאים:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

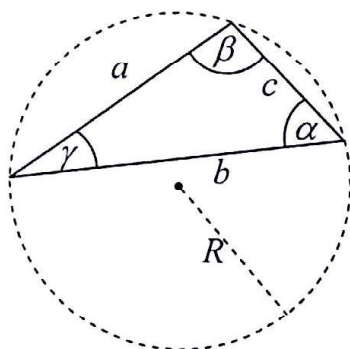
$$\cot \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{הניצב שמול הזווית}} = \frac{b}{a}$$

חשוב!

1. בתרגילים במשולש ישר זווית לרוב נקבל שני נתונים (זוויות או צלעות), וכדי למצוא את הנתון השלישי (זווית/צלע), נשתמש בפונקציה המתאימה מבין הארבע בכדי להגיע למתרון.
2. בכל שימוש, חובה לבדוק באיזה משולש אנו מבעים את החישובים.
3. מותר ואף רצוי להשתמש במשפט פיתגורס בכל עת.

משפטי עזר בגיאומטריה שישיעו לנו בתרגילים בהם הצורה מתפרקת למשולשים ישרי זווית (רשימת חלקית):

1. במלבן ובריבוע - האלכסונים שווים זה לזה וחוצים זה את זה.
2. במקבילית ובמעוין - האלכסונים חוצים זה את זה.
3. במעוין ובריבוע - האלכסונים מאונכים זה לזה וחוצים את הזוויות.
4. במשולש שווה שוקיים, הגובה לבסיס הוא גם חוצה זווית הראש ותיכון.
5. האלכסונים בטרפז שווים שווים זה לזה.
6. בשאלות עם טרפז, לרוב נצטרך להוריד גובה כבניית עזר, מקודקודי הבסיס הקטן.
7. בשאלות עם טרפז שווה שוקיים, נרדף שני גבהים וכן נקבל מלבן ושני משולשים חופפים.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

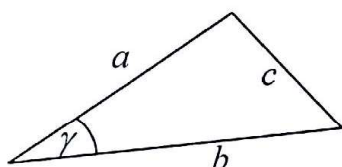
משפט הסינוסים

משפט הסינוסים מתקיים בכל משולש ומשמעותו היא:
היחסים בין הצלעות לבין סינוסי הזוויות שמוֹלן שווים זה לזה.
רק לתלמידים שלמדו את משפט הסינוסים במעגל:
שלושת היחסים הללו שווים גם לקוטר המעגל החוסם את המשולש ($2R$).
(אין למעגל התייחסות בתרגילים לעבודת הקיץ).

בכל שימוש במשפט, חובה לציין את המשולש בו אנו מבצעים חישובים.

במשפט הסינוסים ניתן להשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שמול אחת מהן (γ, α, β).
או כאשר ידועות שתי זוויות ואורך של צלע שמול אחת מהן (α, β, γ).

אולם, כאשר ידועים לנו אורכי שלוש צלעות (α, β, γ) או אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (α, β, γ) לא ניתן להשתמש במשפט הסינוסים ובמקום זאת נשתמש במשפט הקוסינוסים המופיע בהמשך העמוד.



משפט הקוסינוסים

משפט הקוסינוסים מתקיים בכל משולש וניתן להציגו בשני אופנים:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

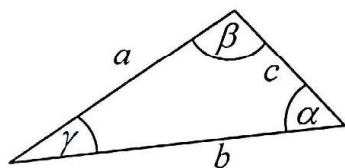
ולאחר בידוד $\cos \gamma$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו
אורכי שלוש הצלעות (α, β, γ) ואנו רוצים
למצוא את זווית המשולש

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו
אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (α, β, γ)
ואנו רוצים למצוא את הצלע השלישית

בכל שימוש במשפט, עלינו לציין את המשולש בו אנו מבצעים חישובים.
כשנדרש לחשב זוויות, לעיתים נקבל שתי תשובות וכמובן נפסול את הזווית שאינה אפשרית בתוך משולש.



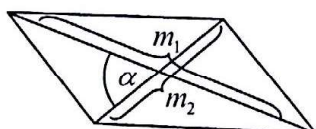
$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$

ניתן לחשב את שטחו של כל משולש באמצעות הנוסחה:
נשתמש בנוסחה זו כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (α, β, γ).

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

אם ניעזר במשפט הסינוסים נוכל לחלץ מתוך הנוסחה הרגילה, נוסחה נוספת:
נשתמש בנוסחה זו כאשר אנו יודעים אורך של צלע אחת ואת כל הזוויות.

חישוב שטח משולש



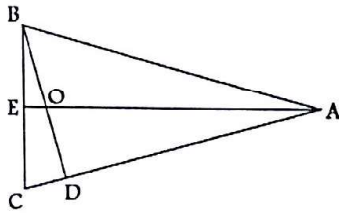
חישוב שטח מרובע על פי אלכסוניו

נסמן את אורכי האלכסונים באמצעות m_1 ו- m_2 .

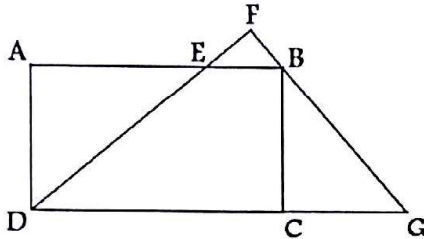
$$S = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

ניתן לחשב את שטחו של כל מרובע באמצעות אורכי אלכסוניו וסינוס הזווית ביניהם:
שימו לב שאין חשיבות באיזו מארבע הזוויות שבין האלכסונים נבחר (נקבל את אותו השטח).

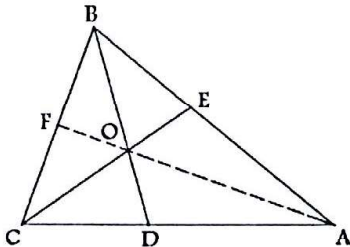
תרגילים - טריגונומטריה במצולעים (ללא מעגל)



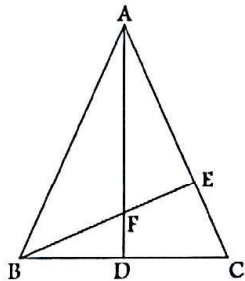
1. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ששטחו 28 סמ"ר, נתון:
 10 ס"מ $AB = AC$. הישר AE הוא חוצה הזווית החדה $\angle BAC$.
 הישר BD הוא הגובה לשוק AC. חשב את שטח המשולש:
 א. $\triangle ADO$
 ב. $\triangle ABO$



2. נתונים המשולש ישר הזווית $\triangle DFG$ ($\angle DFG = 90^\circ$) והמלבן ABCD. הקודקוד B נמצא על הצלע FG. הצלע DF חותכת את המלבן בנקודה E. שטח המשולש $\triangle ADE$ הוא 21 סמ"ר.
 נתון: 5 ס"מ CG , $\angle ADE = 50^\circ$.
 א. חשב את אורך הקטע AE.
 ב. נתון: שטח המשולש $\triangle BEF$ הוא 5 סמ"ר. חשב את היקף המשולש $\triangle BEF$.



3. הישרים BD ו-CE חוצי זווית הבסיס במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$. המשכו של הישר AO חותך את הבסיס BC בנקודה F. נתון: $BC = 2k$. הקטע CO אורך פי 1.3 מהקטע CF.
 א. הבע באמצעות k את שטח המשולש $\triangle BEO$.
 ב. נתון ששטח המשולש $\triangle BEO$ הוא 56 סמ"ר. חשב את היקף המשולש $\triangle ABC$.

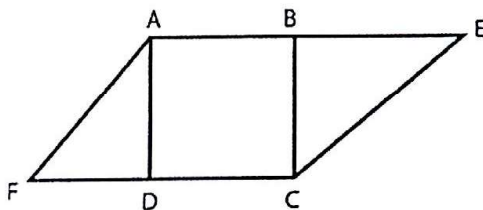


4. הישרים AD ו-BE הם גבהים במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$). נסמן: $\angle ACB = \alpha$, $AC = AB = a$.

א. הבע באמצעות α ו-a את היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}}$.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}}$ בהינתן ש: $\alpha = 45^\circ$.

ג. ללא קשר לסעיף ב', נתון: $S_{\triangle BCE} = 3 \cdot S_{\triangle ABD}$. חשב את הזווית α .



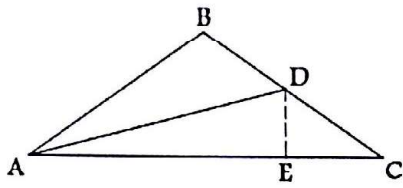
5. נתון הריבוע ABCD שאורך צלעו m. ממשיכים את הצלעות AB ו-CD עד לנקודות E ו-F בהתאמה, כך שמתקיים: $\angle AFC = \angle BCE = \beta$.

א. הוכח: שטח המרובע AECF הוא: $\frac{m^2 \cdot (1 + \tan \beta)^2}{2 \tan \beta}$.

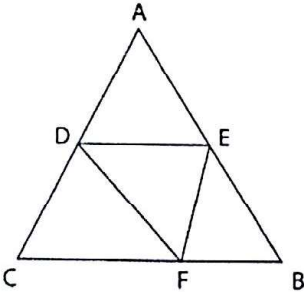
ב. נתון: שטח המרובע AECF הוא $2m^2$. חשב את β .

ג. הבע באמצעות m את היקף המרובע AECF.

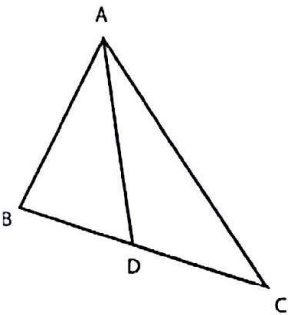
ד. נתון שהיקף המרובע 29 ס"מ. מצאו את ערכו של הפרמטר m.



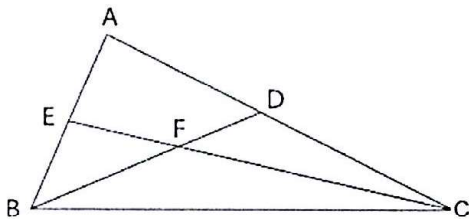
6. נתון המשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($BC=AB$) ששטחו 45 סמ"ר. נתון: $\angle ABC = 110^\circ$. הישר AD חוצה את הזווית $\angle BAC$. מהנקודה D יוצא ישר המאונך לבסיס AC וחותך אותו בנקודה E . חשב את:
- שטח המשולש $\triangle AED$.
 - היקף המשולש $\triangle AED$.
 - היקף המשולש $\triangle ABD$.



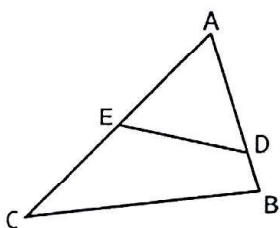
7. במשולש $\triangle ABC$ שווה הצלעות שהיקפו 36 ס"מ נתון: $CF=2BF$. הנקודות E ו- D הן אמצעי הצלעות AB ו- AC בהתאמה. חשב את:
- זווית המשולש $\triangle DEF$.
 - שטח המשולש $\triangle DEF$.



8. במשולש $\triangle ABC$ הישר AD חוצה את הזווית $\angle BAC$. נתון: $BD=6$ ס"מ, $CD=9$ ס"מ, $AB=12$ ס"מ, $AC=18$ ס"מ. חשב את:
- אורך חוצה הזווית AD .
 - שטח המשולש $\triangle ACD$.

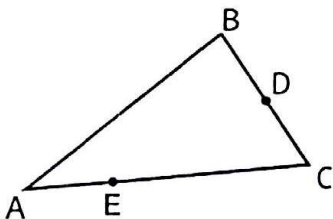


9. במשולש $\triangle ABC$ אורכי התיכונים BD ו- CE הם בהתאמה $3a$ ו- $4.5a$. נתון: $\angle DFC = 29^\circ$. הזווית $\angle BDC$ ו- $\angle BEC$ קהות.
- הבע באמצעות a את היקף המשולש $\triangle ABC$.
 - הבע באמצעות a את אורך התיכון השלישי.
 - נתון: שטח המשולש $\triangle ABF$ הוא 20 סמ"ר. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$.

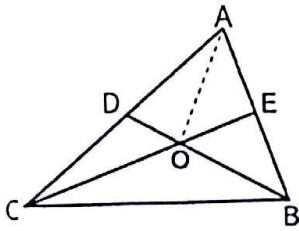


10. הנקודות D ו- E נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$ כמתואר בשרטוט כך שמתקיים: $AD=3BD$ ו- $CE=AE$.

- חשב את היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$.
- נתון: $AD=AE$. נסמן: $\angle BAC = \alpha$. הבע באמצעות α את היחס: $\left(\frac{BC}{DE}\right)^2$.
- נתון: $BC=2DE$. חשב את α .



11. במשולש $\triangle ABC$ נסמן: $BC=2m$, $AC=2BC$, $\angle ACB = 60^\circ$. חשב את הזווית $\angle BAC$.
- הנקודה D היא אמצע BC . הנקודה E נמצאת על AC כך ש: $CE=3AE$. נתון: $DE = \sqrt{7}$ ס"מ. מצא את ערכו של הפרמטר m .
 - חשב את שטח המרובע $ABDE$.



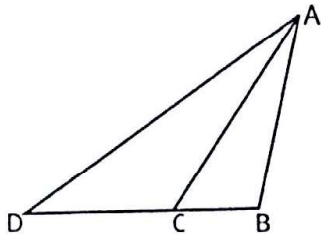
12. במשולש $\triangle ABC$ התיכונים BD ו-CE נחתכים בנקודה O.

נתון: $DO = 2$ ס"מ, $EO = 3$ ס"מ, $\angle EOB = 50^\circ$.

א. חשב את היקף המשולש $\triangle ABC$.

ב. חשב את אורך הקטע AO.

ג. חשב את שטח המשולש $\triangle ACO$.



13. במשולש $\triangle ABC$ הנקודה C נמצאת על BD כך שמתקיים: $CD = 2BC$.

נתון: $AC = BD$. נסמן: $\angle ACB = \beta$.

א. הבע באמצעות β את היחס: $\frac{AD}{AB}$.

ב. נתון: $AD = 2AB$. מצא את β .

ג. שטח המשולש $\triangle ACD$ הוא 20 סמ"ר. חשב את אורך AC.

פתרונות:

(1) א. 10.51 סמ"ר. ב. 12.65 סמ"ר.

(2) א. 7.06 ס"מ. ב. 10.85 ס"מ.

(3) א. $0.607k^2$. ב. 123.86 ס"מ.

(4) א. $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}} = 4 \cos^2 \alpha$. ב. $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABD}} = 2$. ג. $\alpha = 30^\circ$.

(5) א. $\beta = 45^\circ$. ב. $6.82m$. ג. 4.25 ס"מ.

(6) א. 19.23 סמ"ר. ב. 26.11 ס"מ. ג. 25.06 ס"מ.

(7) א. 79.1° , 54.79° , 46.1° . ב. 15.58 סמ"ר.

(8) א. 12.728 ס"מ. ב. 53.577 סמ"ר.

(9) א. 1.2a. ב. 2.37a. ג. 60.17 סמ"ר.

(10) א. 0.375. ב. $\frac{26 - 24 \cos \alpha}{9 - 9 \cos \alpha}$. ג. 33.557° .

(11) א. 30° . ב. $m = 1$. ג. 2.165 סמ"ר.

(12) א. 25.2 ס"מ. ב. 4.59 ס"מ. ג. 9.17 סמ"ר.

(13) א. $\sqrt{\frac{13 + 12 \cos \beta}{10 - 6 \cos \beta}}$. ב. 41.41° . ג. 9.52 ס"מ.